



Logika rozmyta czyli jak komputer może "powiedzieć": *chyba*

XXIII Festiwal Nauki, Techniki i Sztuki, Łódź, 18 kwietnia 2023



WYDZIAŁ
MATEMATYKI
i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Piotr Fulmański

Plan spotkania



1. Różne światy
 - Świat logiki
 - Świat maszyn liczących
2. Co z tego powstało?
3. Logika logiką, ale...
4. Wróćmy zatem do początku
5. A teraz to uogólnijmy
6. Zibory rozmyte



Różne światy

Świat logiki

Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Arystoteles, 384-322 p.n.e,
prekursor współczesnej,
logiki



Popiersie Arystotelesa. Marmur, rzymska kopia według greckiego oryginału z brązu autorstwa Lysipposa z 330 r. p.n.e.; alabastrowy płaszcz jest późniejszym dodatkiem.



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Logika (gr. λόγος, *logos* – rozum, słowo, myśl) – nauka formalna o:

- jasnym i ścisłym formułowaniu myśli,
- regułach poprawnego rozumowania i uzasadniania twierdzeń.

Pierwotnie dział filozofii, jednak narodziny *rachunku zdań* w XIX wieku zapoczątkowały logikę matematyczną.



Popiersie Arystotelesa. Marmur, rzymska kopia według greckiego oryginału z brązu autorstwa Lysipposa z 330 r. p.n.e.; alabastrowy płaszcz jest późniejszym dodatkiem.



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Zdaniem w logice nazywamy wypowiedź oznajmującą i sensowną, tj. taką, której w ramach danej nauki można **przypisać ocenę prawdziwości albo fałszu** i tylko jedną z tych dwóch ocen.

Ocenę prawdziwości oznaczamy cyfrą **1**, ocenę fałszu cyfrą **0**.

Zdania oznaczamy małymi literami alfabetu, np. p , q , r , nazywanymi *zmiennymi zdaniowymi*.



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

8 jest liczbą parzystą $\longrightarrow$ prawda

5 jest liczbą parzystą $\longrightarrow$ fałsz

5 jest liczbą mniejszą niż 8 $\longrightarrow$ prawda

x jest liczbą parzystą $\longrightarrow$???

5 jest liczbą *małą* $\longrightarrow$???



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Ze zdań logicznych możemy tworzyć *zдания złożone*, korzystając ze *spójników zdaniotwórczych* (*spójników logicznych, funktorów*):



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Ze zdań logicznych możemy tworzyć *zдания złożone*, korzystając ze *spójników zdaniotwórczych* (*spójników logicznych, funktorów*):

- nie ($\neg$),
- lub ($\vee$),
- i ($\wedge$),
- implikuje ($\implies$),
- jest równoważne ($\iff$).



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Ze zdań logicznych możemy tworzyć *zдания złożone*, korzystając ze *spójników zdaniotwórczych* (*spójników logicznych, funktorów*):

- nie ($\neg$, NOT, !, $\sim$),
- lub ($\vee$, OR, +, |),
- i ($\wedge$, AND, &),
- implikuje ($\implies$),
- jest równoważne ($\iff$).



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Rachunek zdań to dział logiki matematycznej, który zajmuje się związkami pomiędzy wartościami logicznymi zdań składowych a wartością logiczną zdania utworzonego przy pomocy spójników logicznych. **Treści rozpatrywanych zdań nie mają tu żadnego znaczenia.** Istotna jest tylko ich wartość logiczna.



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

lub ($\vee$, OR, +)

Oceń prawdziwość zdania:

Warszawa jest stolicą Polski lub Wisła przepływa przez Szczecin.

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

lub ($\vee$, OR, +)

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Oceń prawdziwość zdania:

Warszawa jest stolicą Polski lub Wisła przepływa przez Szczecin.

p = *Warszawa jest stolicą Polski,*

q = *Wisła przepływa przez Szczecin,*



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

lub ($\vee$, OR, +)

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Oceń prawdziwość zdania:

Warszawa jest stolicą Polski lub Wisła przepływa przez Szczecin.

p = Warszawa jest stolicą Polski, p = 1

q = Wisła przepływa przez Szczecin,



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

lub ($\vee$, OR, +)

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Oceń prawdziwość zdania:

Warszawa jest stolicą Polski lub Wisła przepływa przez Szczecin.

p = Warszawa jest stolicą Polski, $p = 1$

q = Wisła przepływa przez Szczecin, $q = 0$



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

lub ($\vee$, OR, +)

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Oceń prawdziwość zdania:

Warszawa jest stolicą Polski lub Wisła przepływa przez Szczecin.

p = Warszawa jest stolicą Polski, $p = 1$

q = Wisła przepływa przez Szczecin, $q = 0$

$p \text{ OR } q =$



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

lub ($\vee$, OR, +)

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Oceń prawdziwość zdania:

Warszawa jest stolicą Polski lub Wisła przepływa przez Szczecin.

p = Warszawa jest stolicą Polski, $p = 1$

q = Wisła przepływa przez Szczecin, $q = 0$

$$p \text{ OR } q = 1 \text{ OR } 0 =$$



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

lub ($\vee$, OR, +)

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Oceń prawdziwość zdania:

Warszawa jest stolicą Polski lub Wisła przepływa przez Szczecin.

p = Warszawa jest stolicą Polski, $p = 1$

q = Wisła przepływa przez Szczecin, $q = 0$

$$p \text{ OR } q = 1 \text{ OR } 0 = 1$$



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki



p	NOT p
0	1
1	0

p	q	p OR q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	p AND q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	p $\rightarrow$ q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	p $\leftrightarrow$ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Szczególnie ważne dla prawidłowego wnioskowania i dowodzenia są takie zdania złożone, które zawsze mają wartość logiczną 1 niezależnie od wartości zdań składowych (niezależnie od tego jakie zdania, o jakiej wartości logicznej, podstawimy w miejsca zmiennych zdaniowych); zdanie takie nazywamy *tautologiami*.



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Prawo:

- podwójnego zaprzeczenia: $\sim (\sim p) = p$
- wyłączonego środka: $p \vee (\sim p)$
- sprzeczności: $\sim (p \wedge (\sim p))$
- kontrapozycji: $(p \implies q) \iff ((\sim q) \implies (\sim p))$
- modus ponens: $[(p \implies q) \wedge p] \implies q$

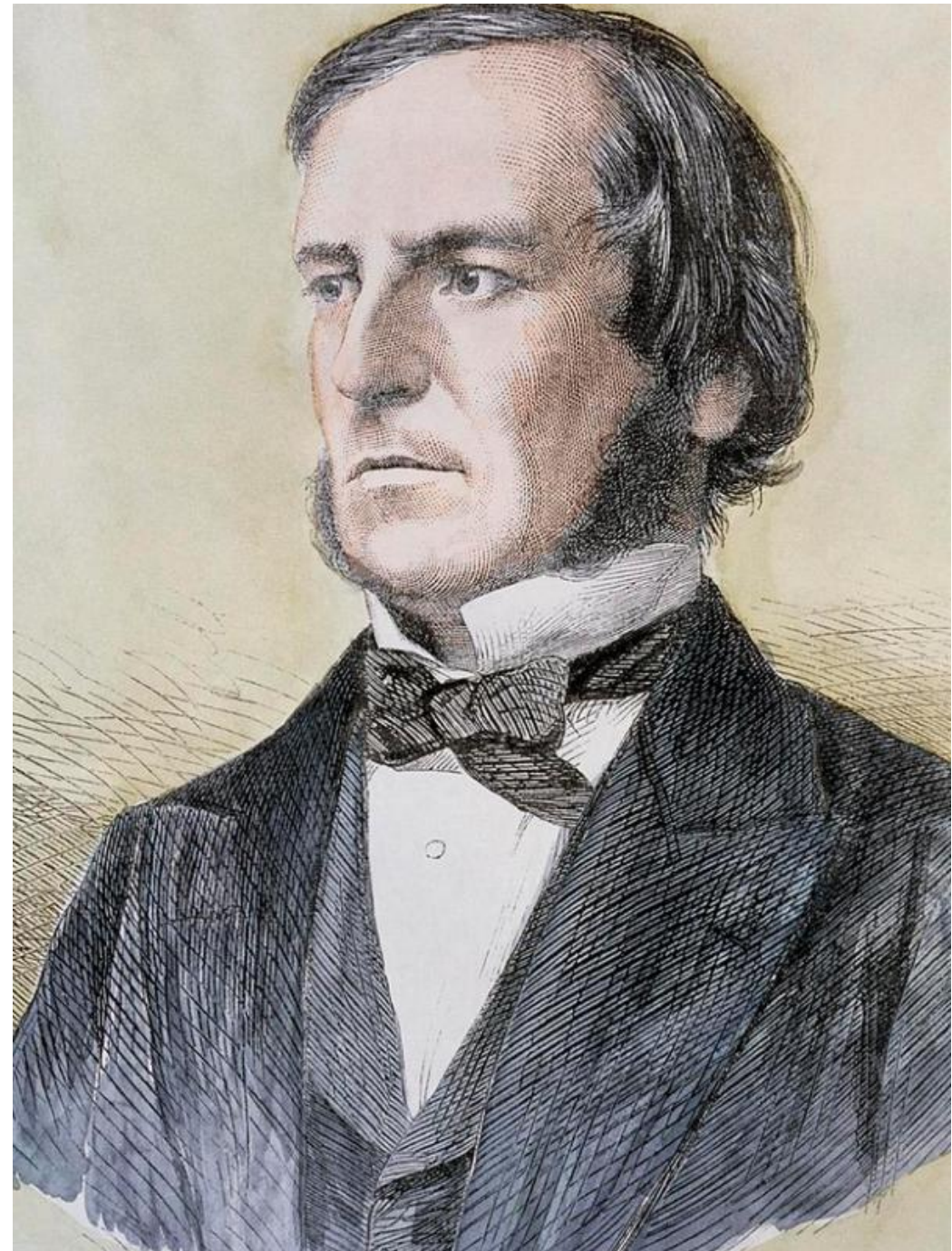


Różne światy

Świat pierwszy – próba zmatematyzowania logiki



George Boole, 1815-1864



Różne światy

Świat pierwszy – próba zmatematyzowania logiki

W 1847 roku Boole opublikował książkę "*The Mathematical Analysis of Logic*" (*Matematyczna Analiza Logiki*) a 1854 opublikował swe najważniejsze dzieło „*An Investigation into The Laws of Thought, on Which Are Founded The Mathematical Theories of Logic and Probabilities*” (*Badanie praw myślenia, na którym oparte są matematyczne teorie logiki i prawdopodobieństwa*).

Autor wykazał, w jaki sposób prawa logiki podane przez Arystotelesa mogą stanowić przedmiot rachunków. Ta „algebra logiki”, choć prowadziła do zjednoczenia matematyki i logiki nikomu nie wydała się wówczas interesująca a tym bardziej do czegoś potrzebna.

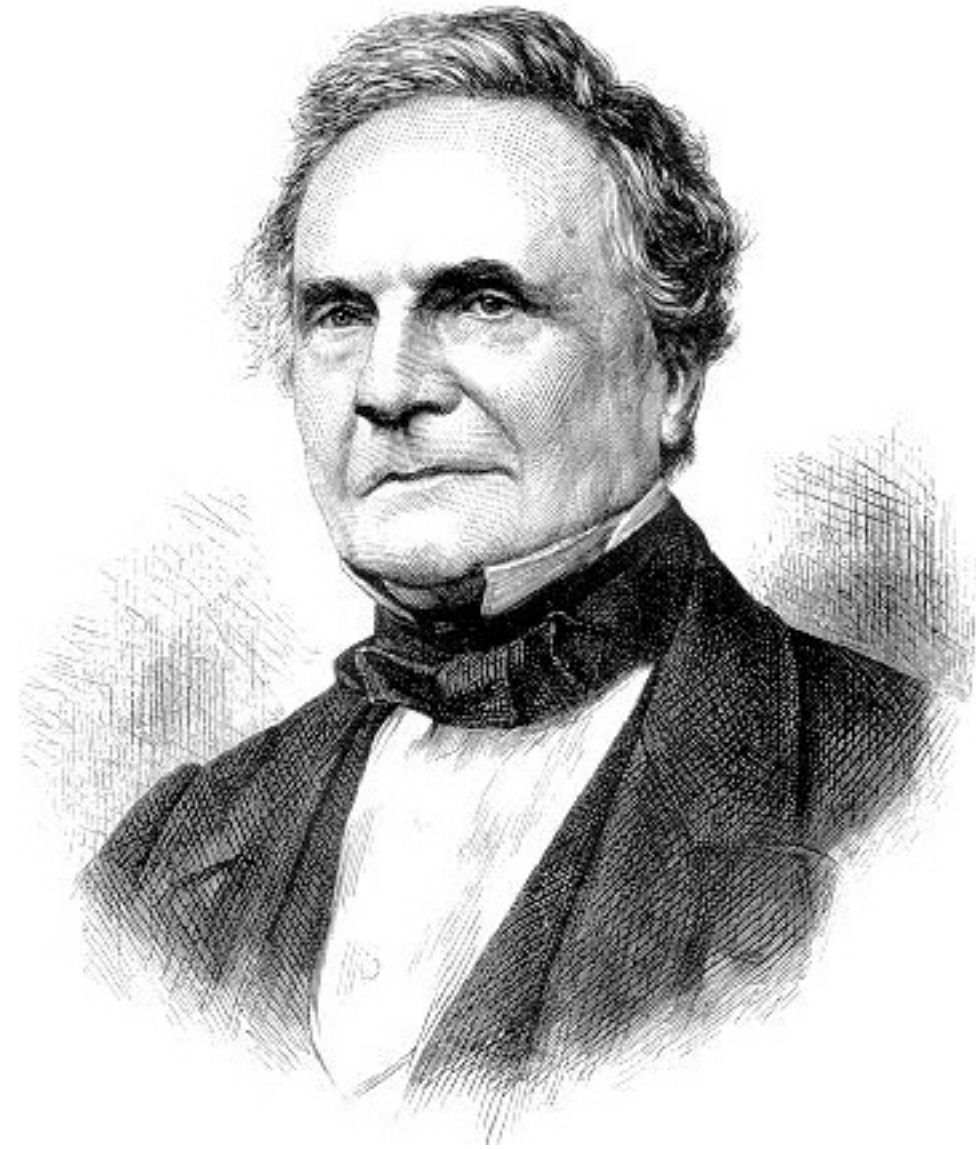


Różne światy

Świat maszyn liczących

Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących



Charles Babbage,
1791-1871



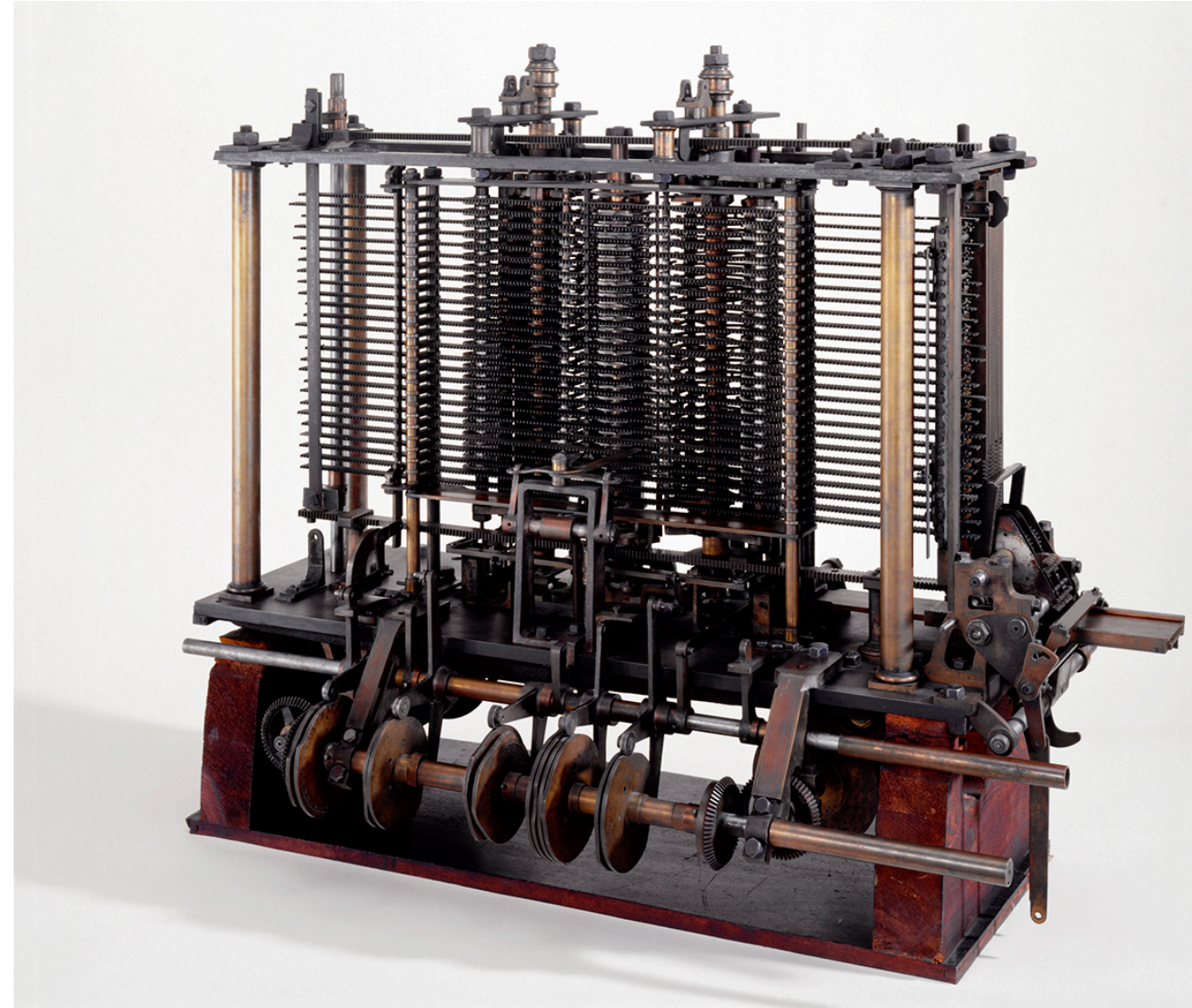
Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących

Szczególnie ważnym pomysłem Babbage'a była maszyna analityczna (1833-1871).

Co prawda, nie doczekała się ona realizacji praktycznej, jednak jej konstrukcja posłużyła późniejszym twórcom (głównie Johnowi von Neumannowi) do opracowania dzisiejszych komputerów.

Formalnie rzecz biorąc zaprojektowana przez Babbage'a maszyna analityczna mieściła się w późniejszej definicji komputera, będąc zdolną do wykonywania dowolnych ciągów instrukcji oraz operowania na danych.



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących

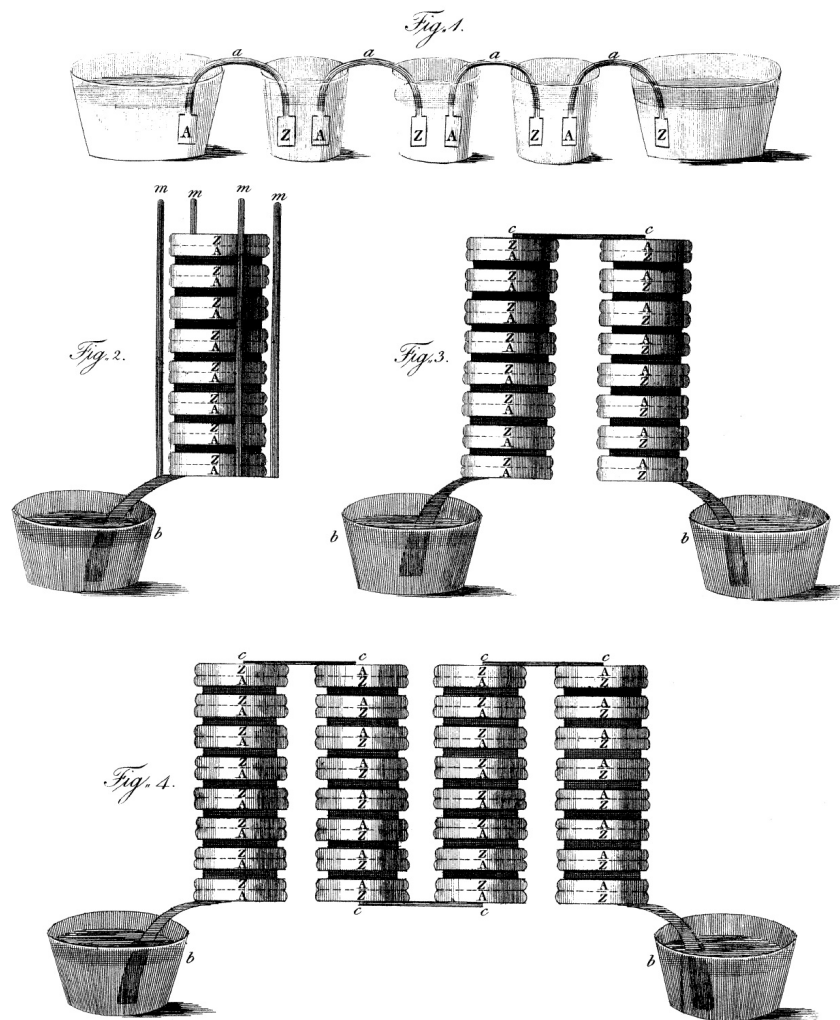


Alessandro Giuseppe
Antonio Anastasio Volta,
1745-1827



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących



Rysunki z pracy Volty przedstawiające baterie (stosy) ogniw. Naczynia końcowe służą do sprawdzania napięcia przez zanurzenie rąk.



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących



Claude Elwood Shannon,
1916-2001



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących

Zafascynowany algebrą Boole'a starał się znaleźć jej zastosowanie w programowaniu przełączników obwodów elektrycznych. W swojej pracy magisterskiej, napisanej w 1938 r., sformułował pomysł zastosowania bramek logicznych realizujących operacje zgodnie z algebrą Boole'a z zastosowaniem przekazników.



Dziś wszystkie tzw. układy logiczne w urządzeniach elektronicznych są konstruowane na podstawie algebry Boole'a.



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących



Konrad Ernst Otto Zuse,
1910-1995



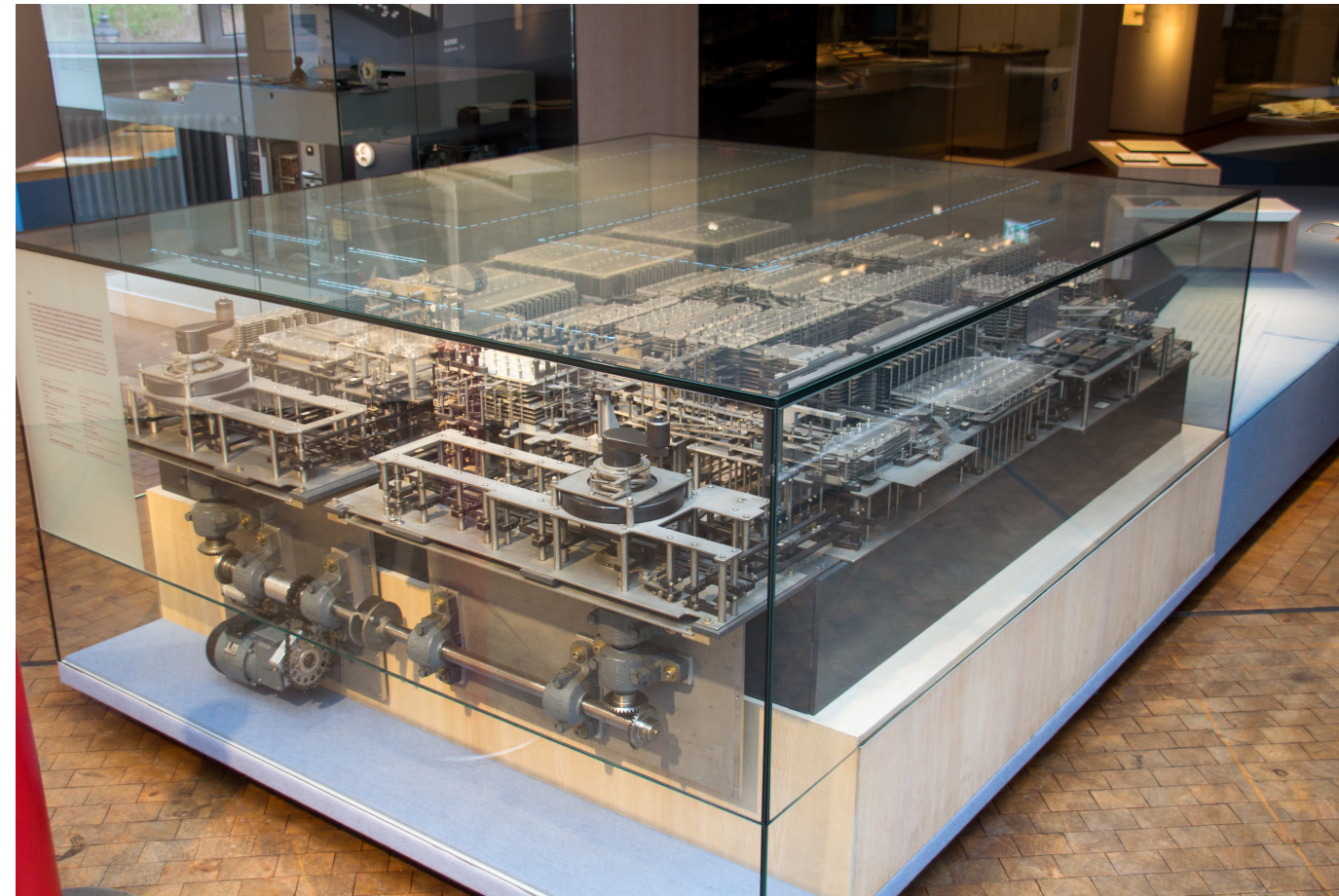
Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących

„Z1” (ukończony w 1938 r.) był pierwszym swobodnie programowalnym komputerem na świecie, który wykorzystywał logikę Boole'a i binarne liczby zmiennoprzecinkowe.

Komputer ten uległ zniszczeniu podczas bombardowania Berlina w grudniu 1943 roku, wraz ze wszystkimi planami budowy.

Replika tego modelu znajduje się w Muzeum Ruchu i Techniki w Berlinie.



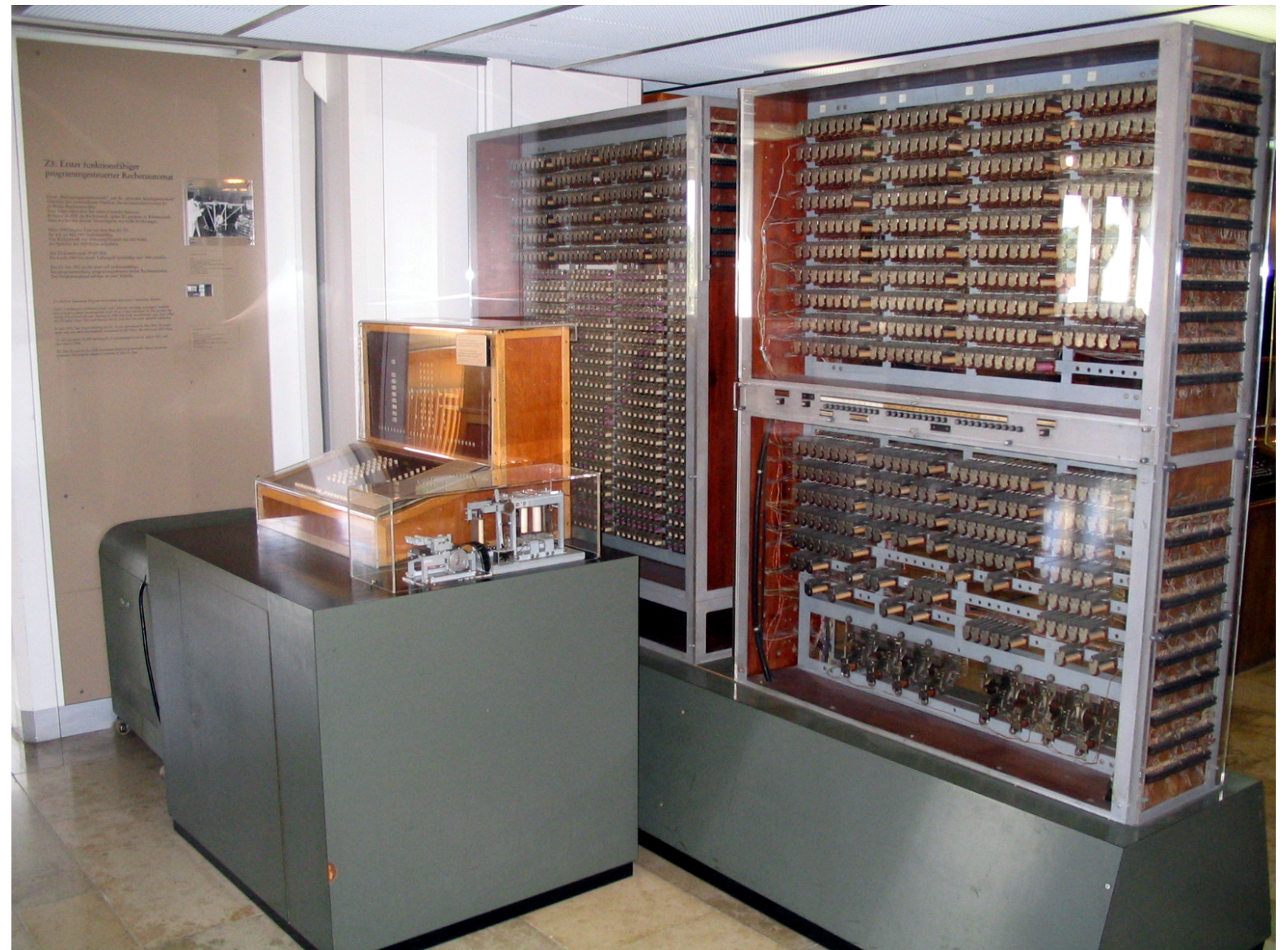
"Z1 nie funkcjonował najlepiej i pod tym względem replika jest bardzo wierna — też nie działa zbyt dobrze."

—Konrad Zuse



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących



Replika (Muzeum w Monachium) komputera elektromechanicznego Z3 (12 maja 1941). Był to pierwszy na świecie działający programowalny, w pełni automatyczny komputer cyfrowy.



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących



John William Mauchly
/moszli/, 1907-1980

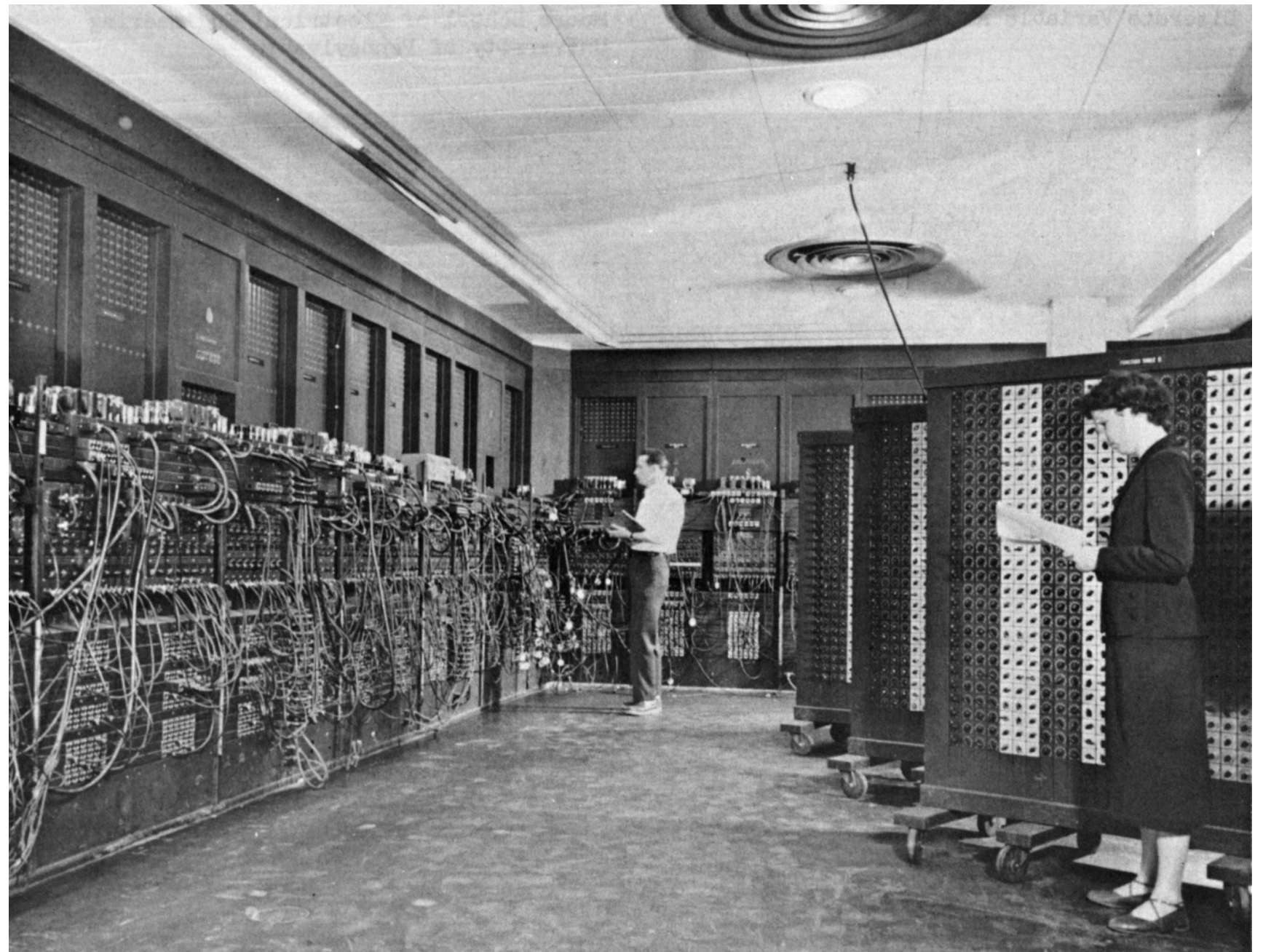


John Adam Presper Eckert
Jr., 1919-1995



Różne światy

Świat drugi – świat maszyn liczących



ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) – pierwszy programowalny, elektroniczny komputer cyfrowy ogólnego przeznaczenia, ukończony w 1945 roku (Ballistic Research Laboratory).



Co z tego powstało?

Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

Komputer – dawniej: mózg elektronowy, elektroniczna maszyna cyfrowa, maszyna matematyczna – maszyna przeznaczona do przetwarzania informacji, które da się zapisać w formie ciągu cyfr albo sygnału ciągłego. [...]

Właściwie wszystkie współczesne komputery to cyfrowe maszyny elektroniczne.



Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące



Elektroniczne cyfrowe – czyli jakie?



Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

Elektronika – dziedzina techniki i nauki zajmująca się wytwarzaniem i przetwarzaniem sygnałów w postaci prądów i napięć elektrycznych lub pól elektromagnetycznych. Wykorzystuje zjawiska oddziaływania pomiędzy ładunkami do przenoszenia informacji.



Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

Elektronika cyfrowa – dziedzina elektroniki zajmująca się układami cyfrowymi, sygnałami cyfrowymi i cyfrowym przetwarzaniem sygnałów.



Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

Sygnał cyfrowy to sygnał reprezentujący dane jako sekwencję wartości dyskretnych; w dowolnym momencie może przyjąć co najwyżej jedną ze skończonej liczby wartości.

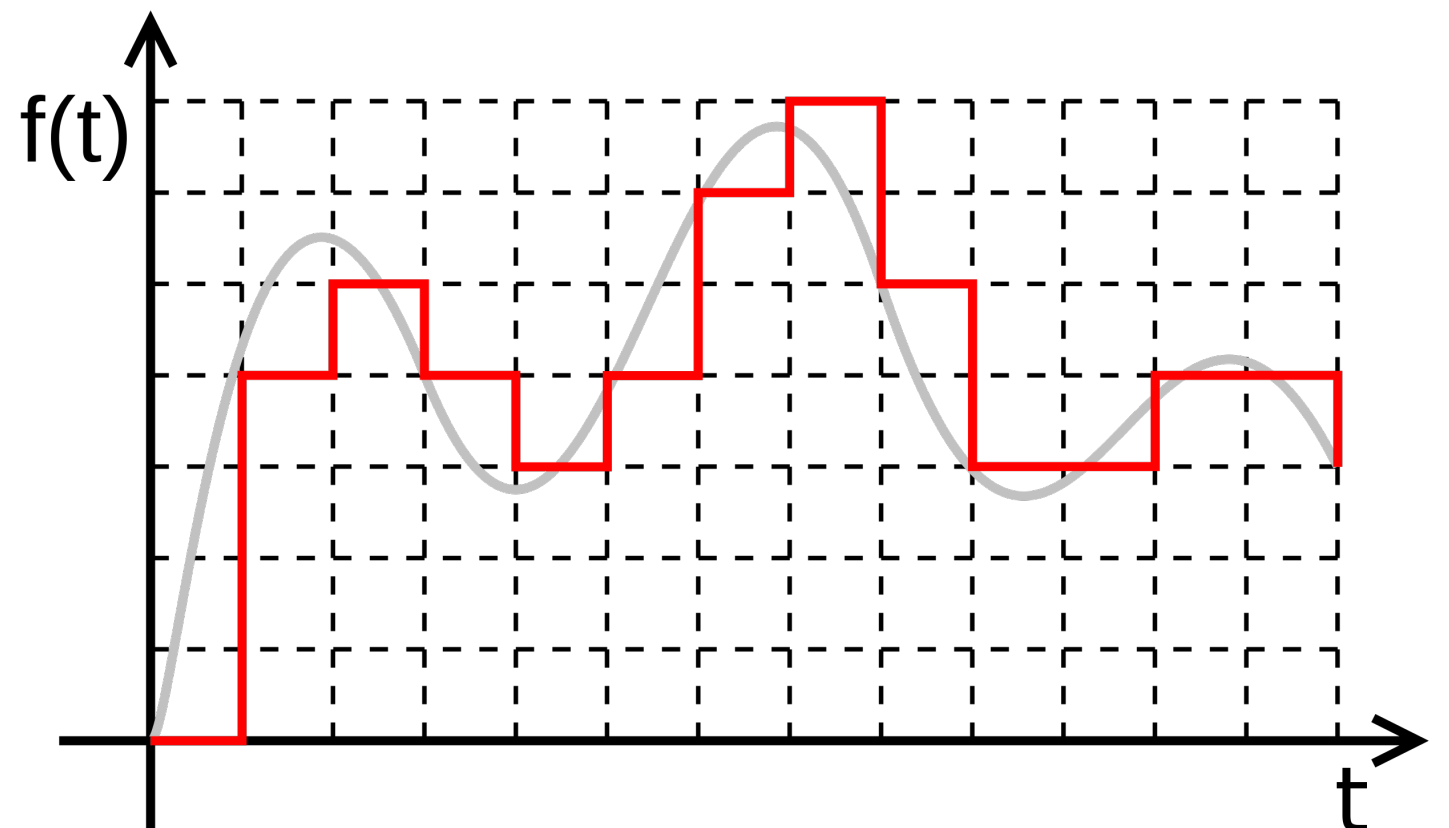


Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

Proste sygnały cyfrowe reprezentują informacje w dyskretnych pasmach poziomów analogowych.

Wszystkie poziomy w danym paśmie wartości reprezentują ten sam stan informacyjny.

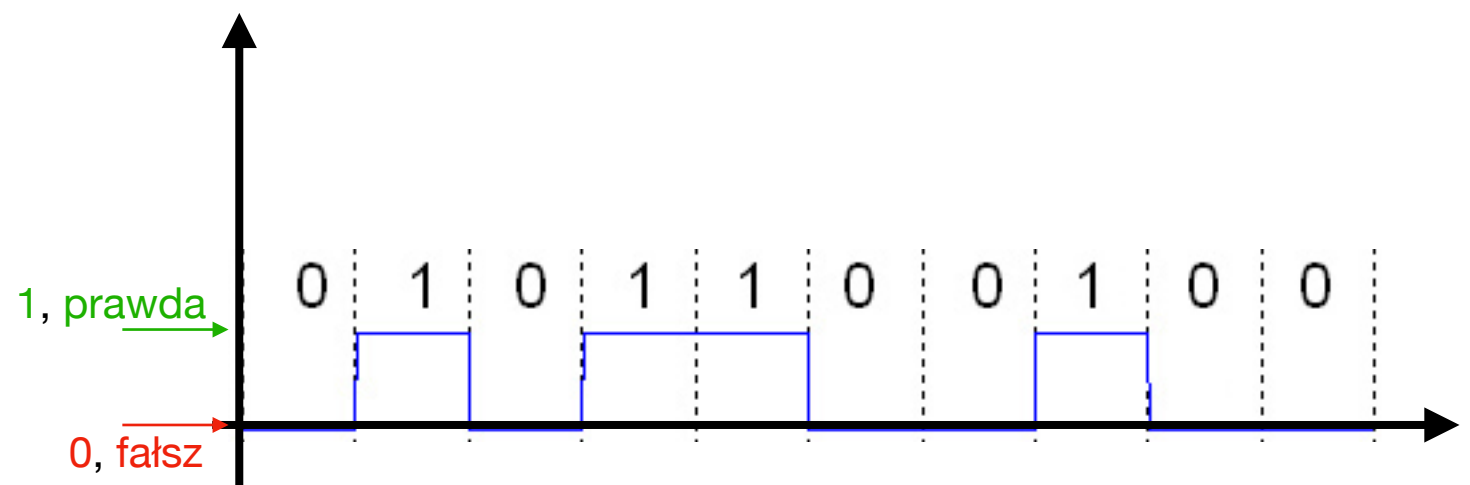
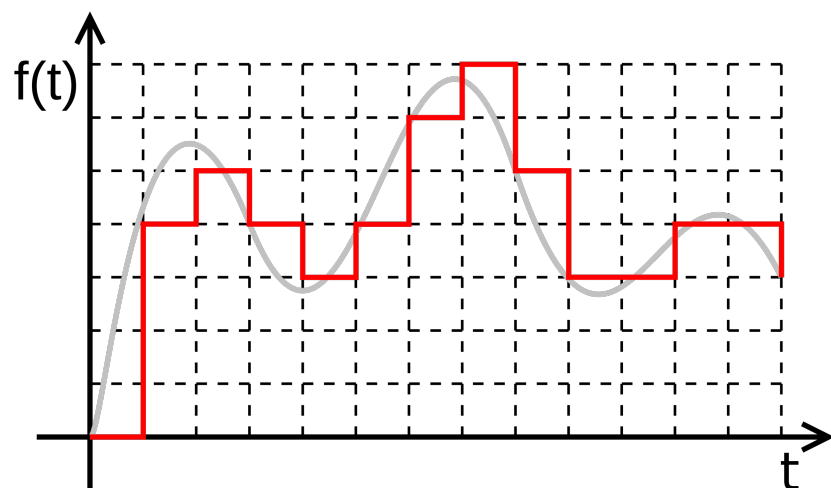


Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

W większości obwodów cyfrowych sygnał może mieć dwie możliwe ważne wartości; nazywa się to **sygnałem binarnym** lub **sygnałem logicznym**.

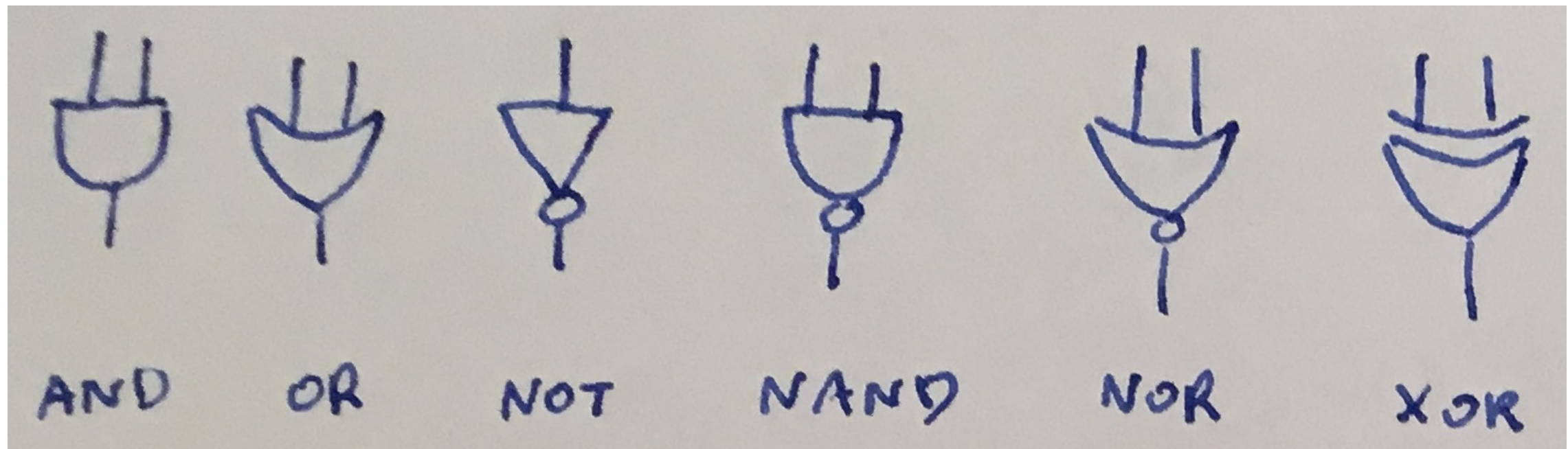
Odpowiadają one dwóm wartościom „zero” i „jeden” (lub „fałsz” i „prawda”) domeny logicznej, więc w dowolnym momencie sygnał binarny reprezentuje jedną cyfrę binarną (bit).



Co z tego powstało?

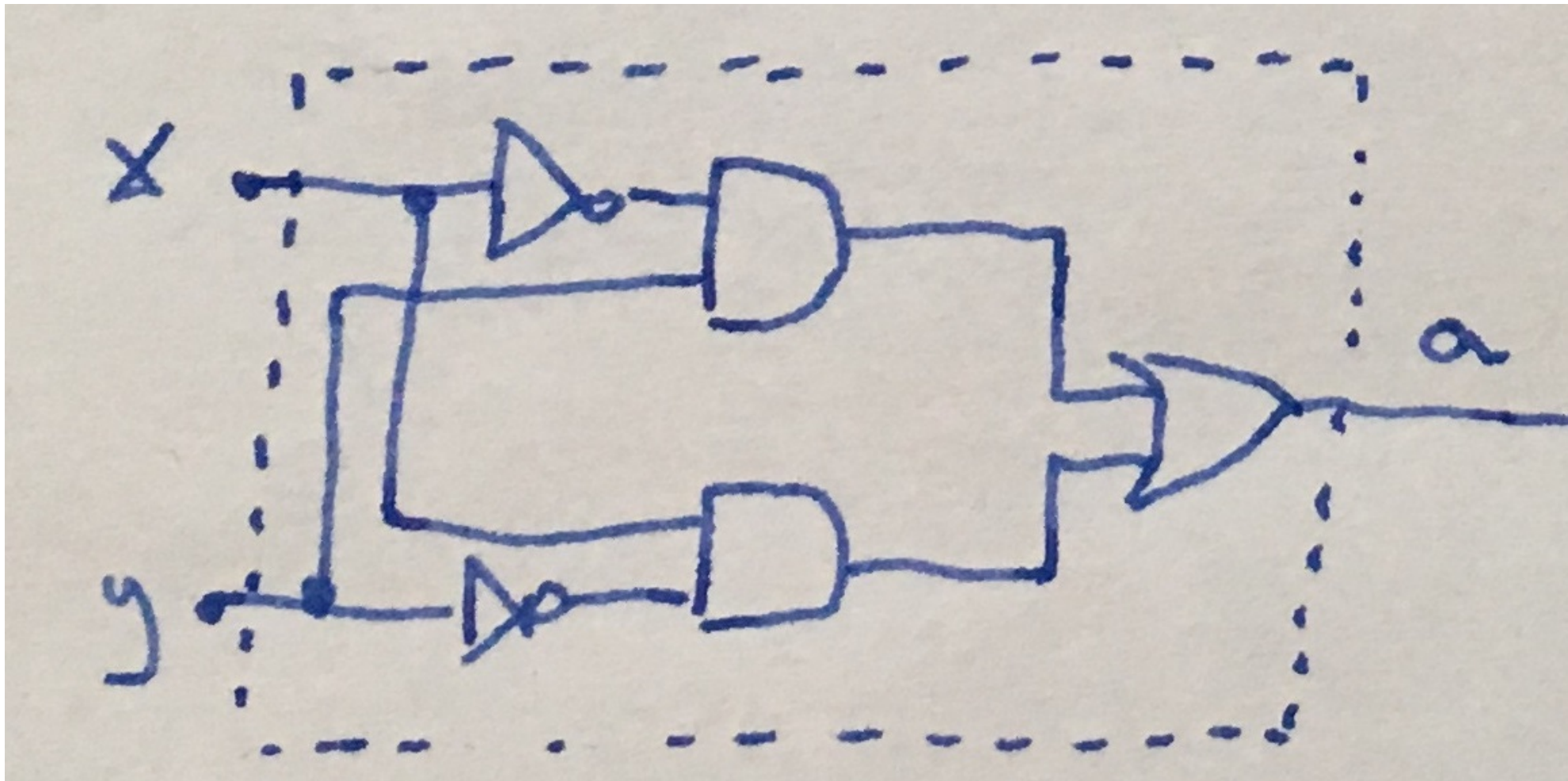
Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

Bramki



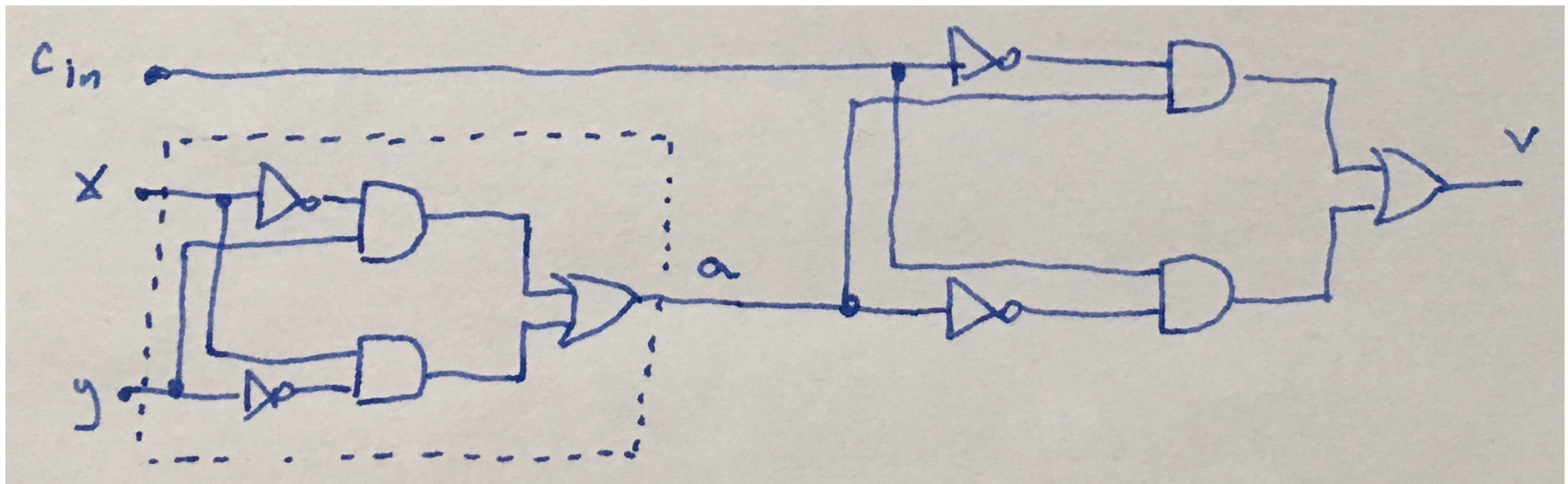
Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące



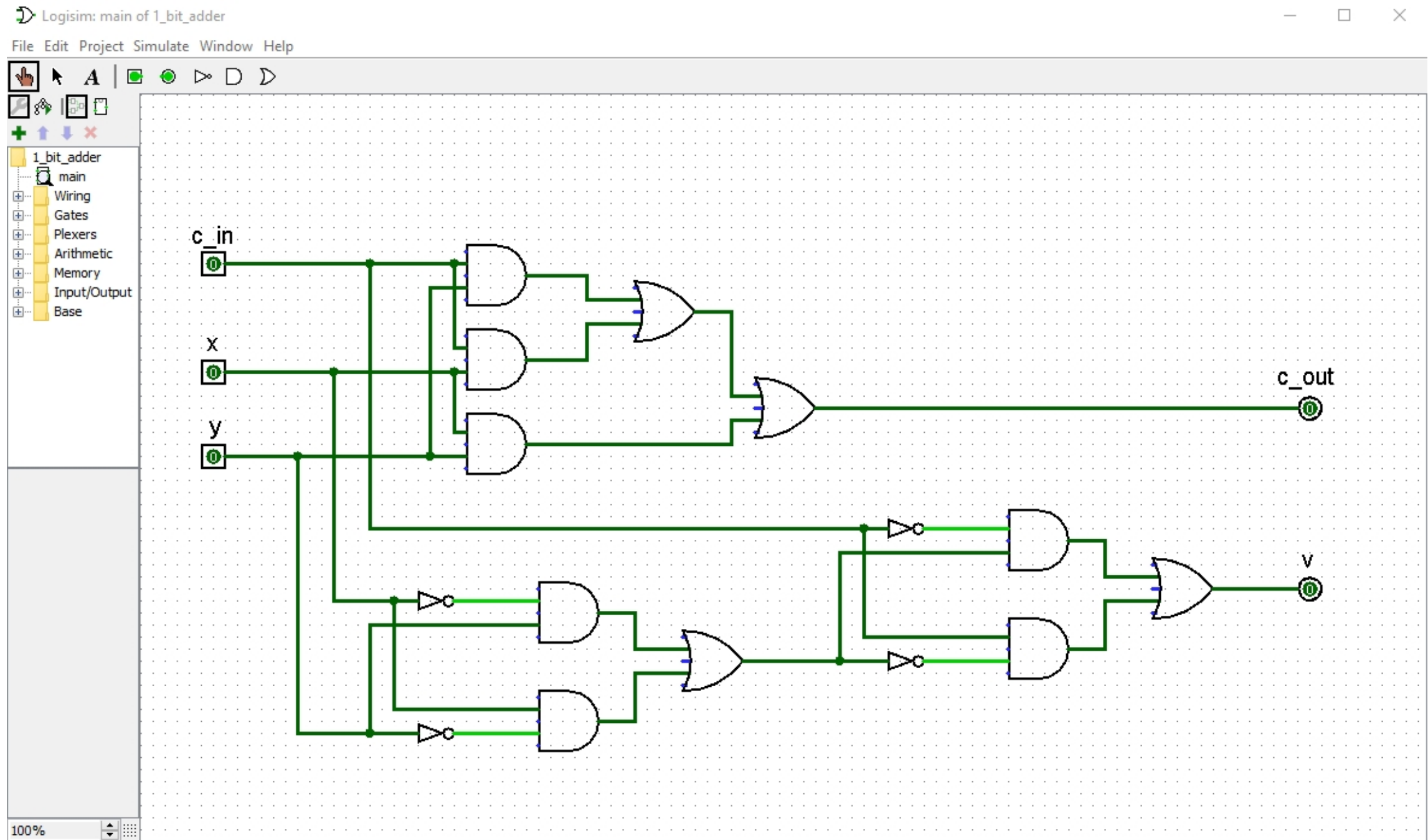
Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące



Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące



Co z tego powstało?

Elektroniczne cyfrowe maszyny liczące

Obserwacja: czegokolwiek by komputer nie robił, jest to zawsze operacja na sygnałach logicznych.

Komputer to ogromny "kalkulator" funkcji logicznych.



Logika logika, ale...

Logika logiką, ale...

Problem 1

Liczba x jest liczbą dodatnią.

???



Logika logiką, ale...

Problem 1

Liczba 2 jest liczbą dodatnią.

prawda



Logika logiką, ale...

Problem 1

Liczba 7 jest liczbą dodatnią.

fałsz



Logika logiką, ale...

Problem 1

Musimy określić zbiór (dziedzinę) w jakim się "poruszamy".



Logika logiką, ale...

Problem 2

Liczba x jest liczbą bliską 7.

???



Logika logiką, ale...

Problem 2

Liczba 2 jest liczbą bliską 7.

prawda, fałsz, ???



Logika logiką, ale...

Problem 2

Liczba 6.5 jest liczbą bliską 7.

prawda, fałsz, ?



Logika logiką, ale...

Problem 2

*Liczba 7 jest liczbą **bliską** 7.*

prawda, fałsz, ?



Logika logiką, ale...

Problem 2



Co to znaczy: "*blisko 7*"?



Logika logiką, ale...

Problem 3

Jest tego więcej:

- *Wysoka temperatura.*
- *Jedzie szybko.*
- *Jest ciężki.*
- ...



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Mamy:

prawda

1

TAK

fałsz

0

NIE



Różne światy

Świat pierwszy – świat logiki

Potrzebujemy:

chyba

może

prawie

blisko

daleko

około



Wróćmy zatem do
początku

Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

Liczba x jest równa 7.



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych



Liczba x jest równa 7.

???



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych



Liczba x jest równa 7.

Jeśli jednak określimy *dziedzinę* (obszar rozważań) dla x , ustalając, że $x = 2$, wówczas możemy pisać coś takiego:

Liczba 2 jest równa 7. $\longrightarrow$ fałsz



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

Możemy więcej, mówiąc, że $x \in R$; wówczas:



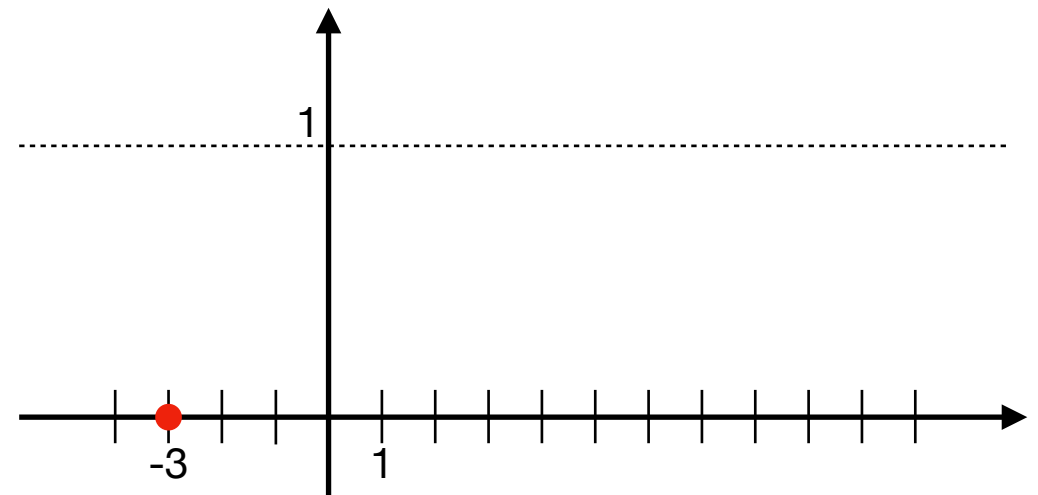
Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych



Możemy więcej, mówiąc, że $x \in R$; wówczas:

Liczba -3 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**



Wróćmy zatem do początku

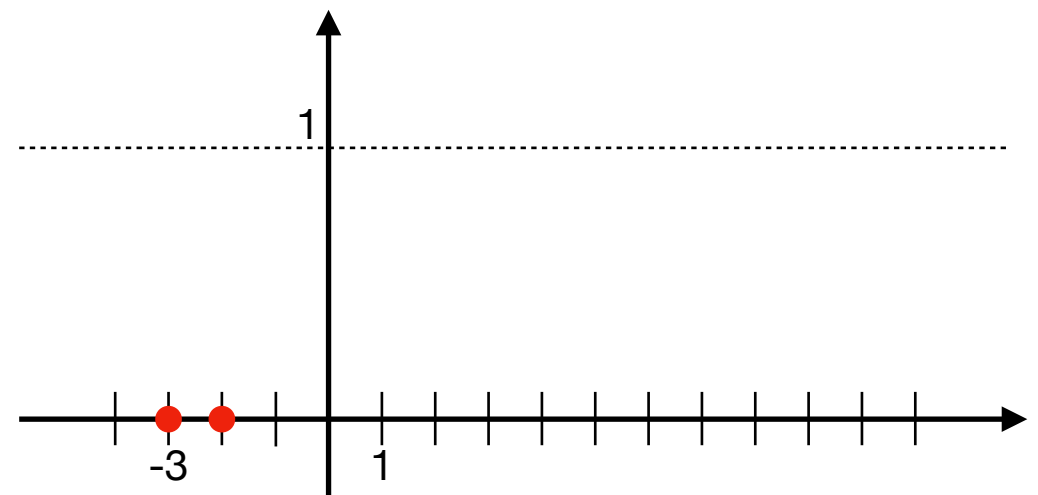
Rysowanie zdań logicznych



Możemy więcej, mówiąc, że $x \in R$; wówczas:

Liczba -3 jest równa 7. $\longrightarrow$ fałsz

Liczba -2 jest równa 7. $\longrightarrow$ fałsz



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych



Możemy więcej, mówiąc, że $x \in R$; wówczas:

Liczba -3 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**

Liczba -2 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**

Liczba -0.25 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**

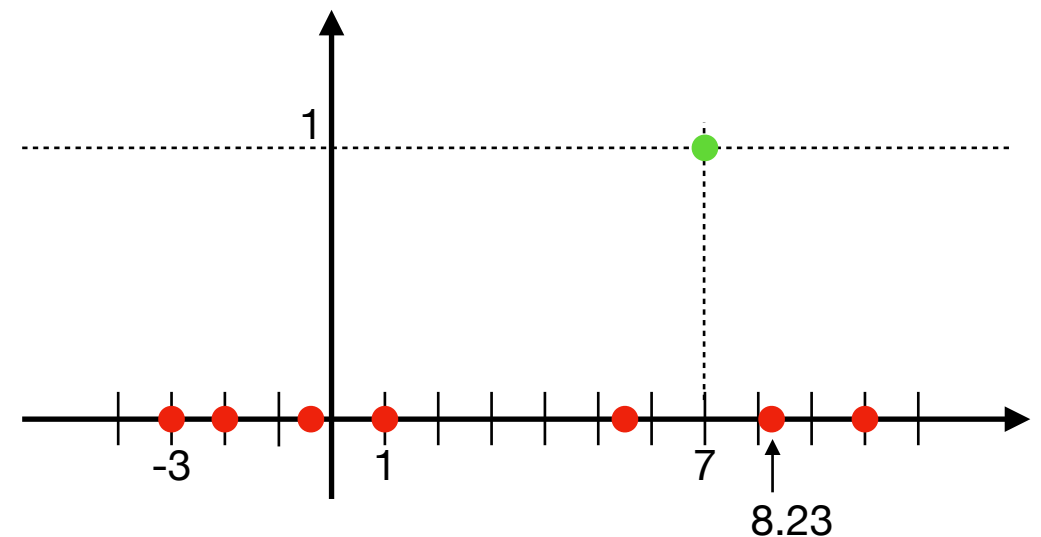
Liczba 1 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**

Liczba 5.5 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**

Liczba 7 jest równa 7. $\longrightarrow$ **prawda**

Liczba 8.23 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**

Liczba 10 jest równa 7. $\longrightarrow$ **fałsz**



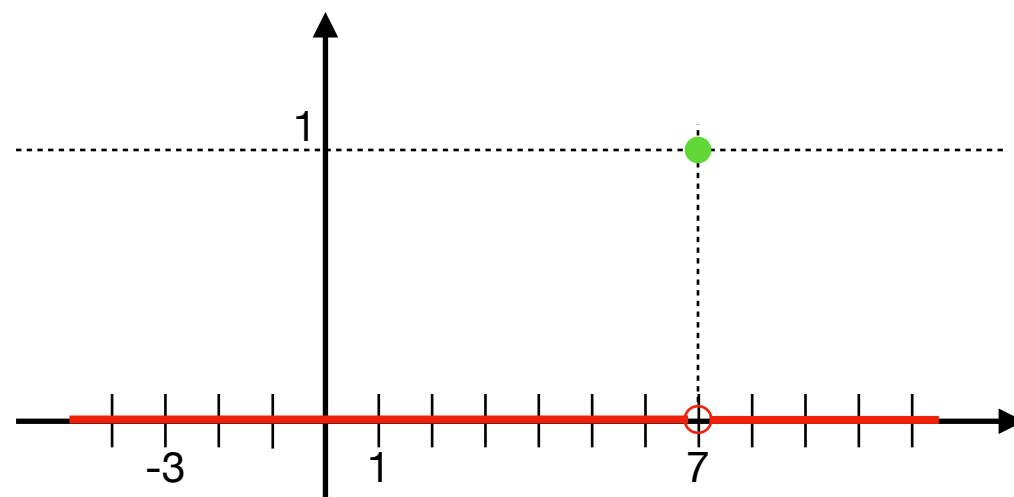
Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

Jeśli więc określimy przestrzeń rozważań, np. $x \in R$, to wówczas możemy określić wartość logiczną (w tej przestrzeni) zdania:

Liczba x jest równa 7.

a nawet to narysować:

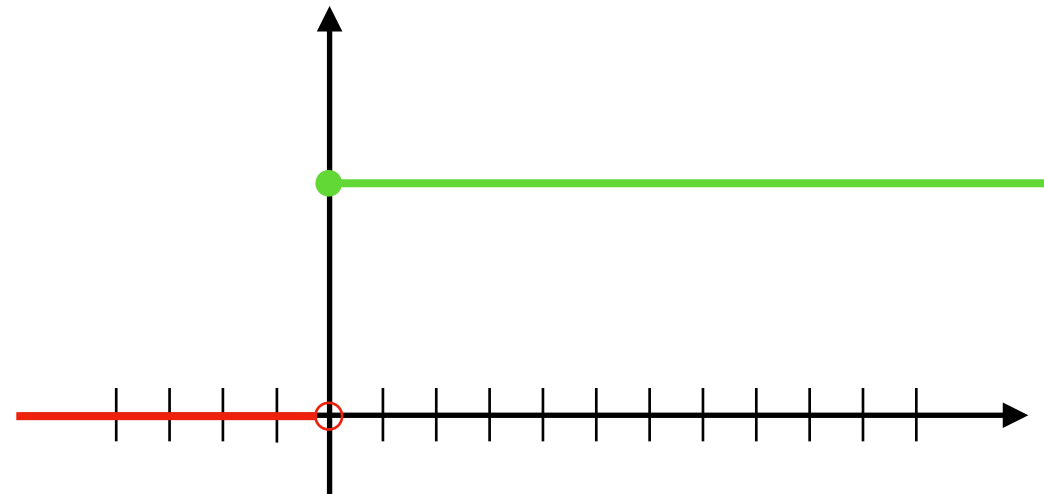


Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

Podobnie ze zdaniem:

Liczba x jest liczbą dodatnią.



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

- Co możemy o tych wykresach powiedzieć?



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

- Co możemy o tych wykresach powiedzieć?

Narysowane funkcje przyjmują tylko dwie wartości: *fałsz* lub *prawda*, *0* lub *1*.



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

- Co możemy o tych wykresach powiedzieć?

Narysowane funkcje przyjmują tylko dwie wartości: *fałsz* lub *prawda*, *0* lub *1*.

- A jak taką funkcję byśmy mogli nazwać?



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

- Co możemy o tych wykresach powiedzieć?

Narysowane funkcje przyjmują tylko dwie wartości: *fałsz* lub *prawda*, 0 lub 1.

- A jak taką funkcję byśmy mogli nazwać?

Funkcja *przynależności* elementu z obszaru rozważań do wartościowanego (ocenianego) pojęcia.

Funkcja ta każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje stopień (nie)spełnienia przez niego określonego warunku; jego przynależność do zbioru elementów spełniających lub niespełniających określony warunek.



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych

Oznaczmy tę *funkcję przynależności* przez μ .

Wówczas wiemy, że:

$$\mu_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

gdzie X jest obszarem (przestrzenią) rozważań a A "pojęciem" które ma sens w tej przestrzeni rozważać.



Wróćmy zatem do początku

Rysowanie zdań logicznych



Oznaczmy tę *funkcję przynależności* przez μ .

Wówczas wiemy, że:

$$\mu_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

gdzie X jest obszarem (przestrzenią) rozważań a A "pojęciem" które ma sens w tej przestrzeni rozważać.

Możemy wyróżnić 2 przypadki:

- $\mu_A(x) = 1$ – oznacza pełne spełnienie pojęcia A przez element $x \in X$.
- $\mu_A(x) = 0$ – oznacza całkowity brak spełnienia pojęcia A przez element $x \in X$.



A teraz to uogólnijmy

A teraz to uogólnijmy



Dlaczego mieliśmy problem z pojęciem "*blisko 7*"?



A teraz to uogólnijmy



Dlaczego mieliśmy problem z pojęciem "*blisko 7*"?

Bo mieliśmy tylko opcję "tak" albo "nie" i trudno było nam się zdecydować, które wartości to już blisko, a które jeszcze nie.



A teraz to uogólnijmy



Założmy, że naszą przestrzenią rozważań jest przedział $[5,9]$ a pojęcie A to: "*blisko 7*".

Dodatkowo rozluźnijmy sztywne założenie dotyczące funkcji μ_A i zamiast:

$$\mu_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

niech będzie:

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$



A teraz to uogólnijmy



Teraz funkcja μ_A wyraża nasz stopień zdecydowania. Mamy tym razem zamiast dwóch możliwości, trzy:

- $\mu_A(x) = 1$ – 100% pewność, że pewien element $x \in X$ JEST elementem danego pojęcia A (odpowiednik klasycznego *tak, prawda*).
- $\mu_A(x) = 0$ – 100% pewność, że pewien element $x \in X$ NIE JEST elementem danego pojęcia A (odpowiednik klasycznego *nie, fałsz*).
- oraz dodatkowo możliwość określenia naszych wątpliwości gdy nie możemy zdecydować się jak bardzo pewien element $x \in X$ (NIE) JEST elementem danego pojęcia A : $0 < \mu_A(x) < 1$.



A teraz to uogólnijmy



Zatem "*blisko 7*", dla $x \in [5, 9]$, to może być na przykład:

Liczba 5 jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0

Liczba ??? jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0.25

Liczba ??? jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0.5

Liczba ??? jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0.75

Liczba ??? jest blisko 7. $\longrightarrow$ 1

Liczba ??? jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0.75

Liczba ??? jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0.5

Liczba ??? jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0.25

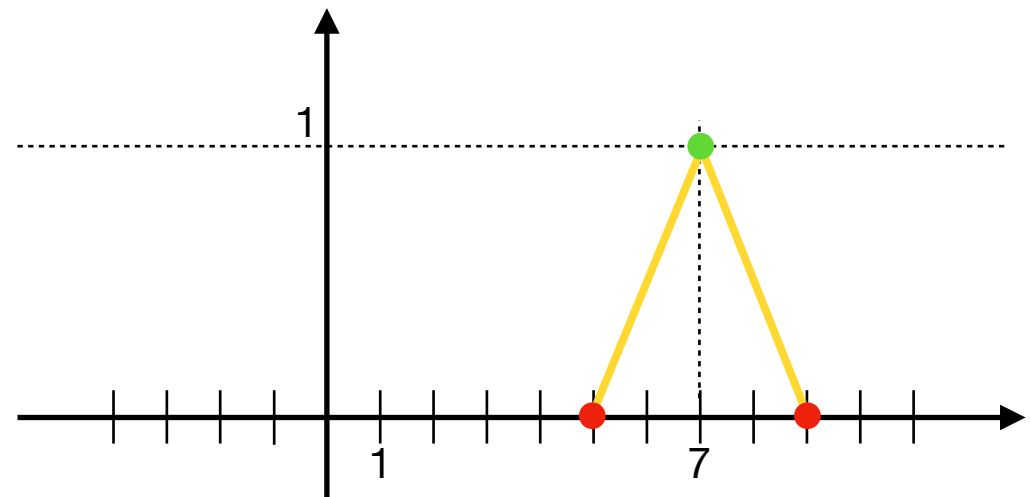
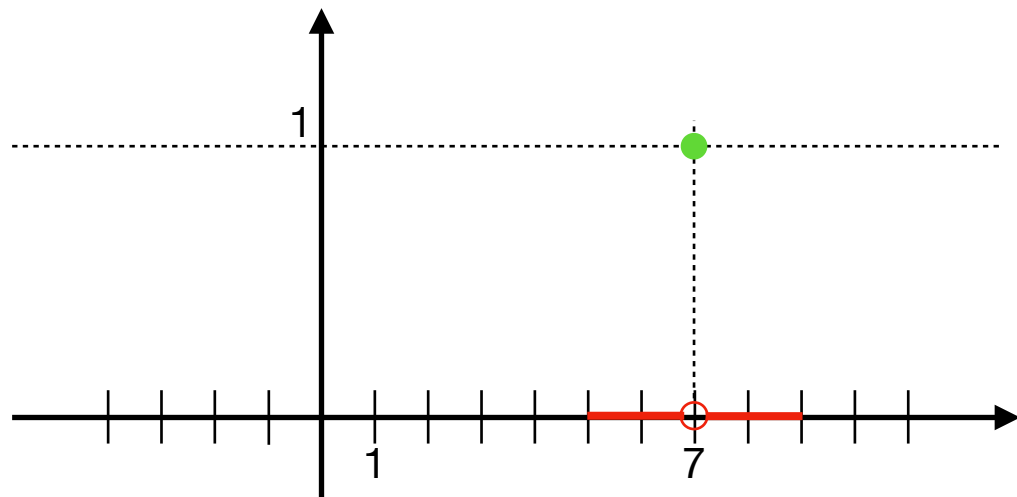
Liczba 9 jest blisko 7. $\longrightarrow$ 0



A teraz to uogólnijmy



Porównajmy wykres "równe 7" i "blisko 7"



A teraz to uogólnijmy



W ten oto sposób funkcja μ staje się uogólnieniem *tak i nie*, które możemy rozumieć jako *chyba, może, prawdopodobnie, około, mniej więcej, ...*



A teraz to uogólnijmy



Takie uogólnienie nazywamy ***zbiorami rozmytymi***.



Zbiory rozmyte

Zbiory rozmyte

Formalna definicja

Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni X , co zapisujemy $A \subseteq X$, nazywamy zbiór par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\},$$

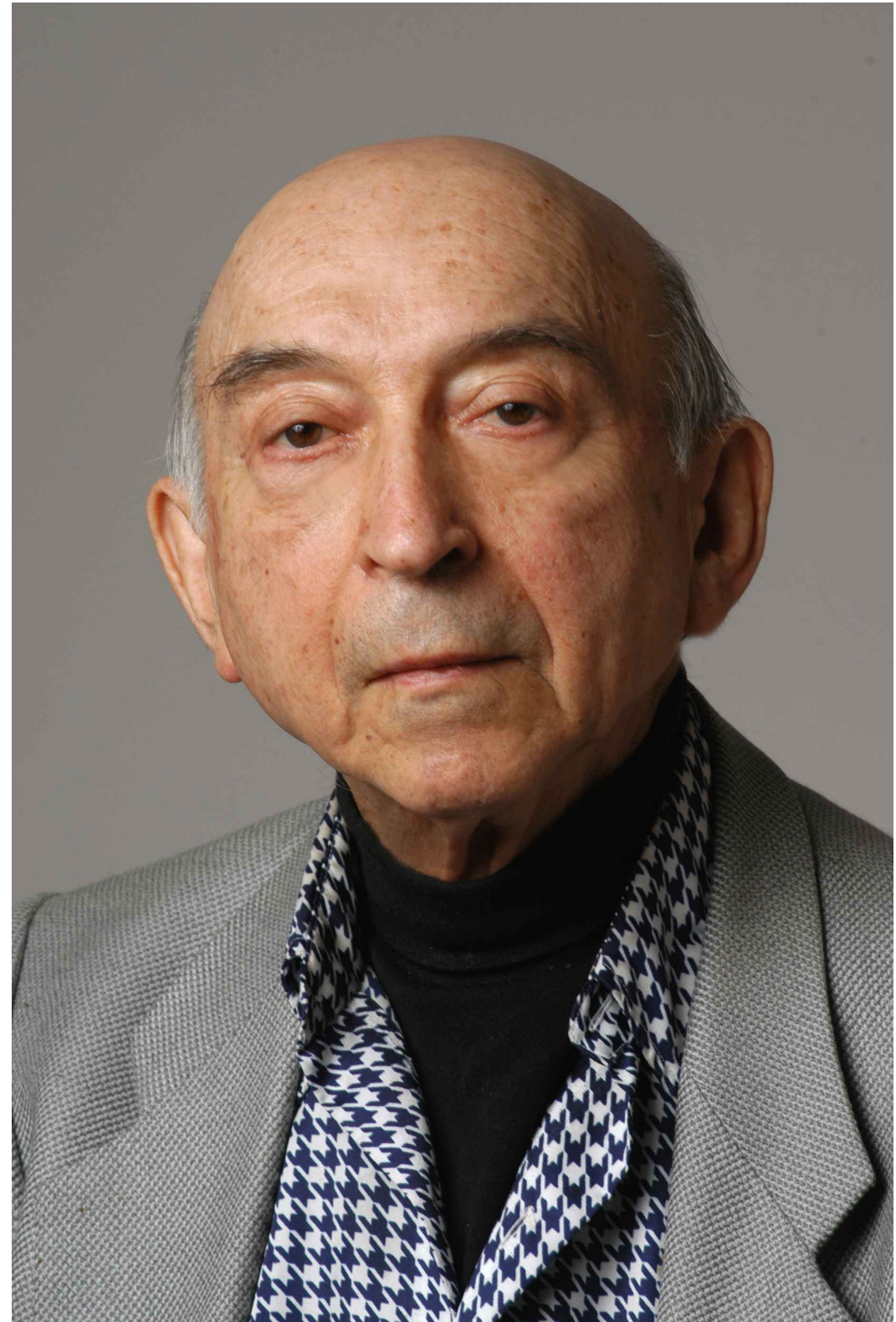
w którym $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A .



Zbiory rozmyte

Formalna definicja

Lotfi Asker Zadeh,
właściwie Lotfi Aliaskerzadeh,
1921-2017



Zbiory rozmyte



Założmy, że $X = \mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych. Chcąc teraz określić pojęcie zbioru liczb naturalnych "bliskich liczbie 7", możemy posłużyć się zbiorami rozmytymi, definiując następujący zbiór rozmyty $A \subseteq X$:

$$A = \frac{0.2}{4} + \frac{0.5}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.8}{8} + \frac{0.5}{9} + \frac{0.2}{10}$$

Powyższy zapis ma charakter symboliczny. Kreska ułamkowa nie oznacza dzielenia, ale oznacza *przyporządkowanie* poszczególnym elementom x_i stopni przynależności $\mu_A(x_i)$. Zapis $\frac{x_i}{\mu_A(x_i)}$ oznacza parę $(x_i, \mu_A(x_i))$. Znak

"+" nie oznacza dodawania, ale sumę mnogościową elementów.



Zbiory rozmyte



Rozważmy nieprecyzyjne stwierdzenia...

- *Wysoka temperatura.*
- *Jedzie szybko.*
- *Jest ciężki.*
- ...



Zbiory rozmyte



Na zbiorach rozmytych możemy definiować operacje mnogościowe i algebraiczne...



Zbiory rozmyte

Przecięcie, suma



Przecięciem (częścią wspólną) zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

dla każdego $x \in X$.

Sumą zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

 dla każdego $x \in X$.

Zbiory rozmyte

Liczby rozmyte



Zbiór rozmyty $A \subseteq R$, którego funkcja przynależności μ_A spełnia warunki:

1. $\sup_{x \in R} \mu_A(x) = 1$, tzn. A jest normalny;
 2. $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$, tzn. A jest wypukły;
 3. jest funkcją przedziałami ciągłą
- nazywamy *liczbą rozmytą*.



Zbiory rozmyte

Liczby rozmyte – operacje arytmetyczne



Funkcja przynależności B sumy dwóch liczb rozmytych A_1 i A_2 określona jest wzorem:

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y=x_1+x_2}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$$

Przykład:

$$A_1 = \frac{0.7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.6}{4}$$

$$A_2 = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.5}{6}$$

$$B = A_1 + A_2 = \frac{\min(0.7, 0.8)}{5} + \frac{\max(\min(0.7, 1), \min(1, 0.8))}{6} + \dots$$



Zbiory rozmyte

Relacje rozmyte

Relacja rozmyta R między dwoma niepustymi zbiorami (nierozmytymi) X i Y nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$:

$$R \subseteq X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$



Zbiory rozmyte

Relacje rozmyte

Tak więc relacja rozmyta jest zbiorem par:

$$R = \left\{ \left((x, y), \mu_R(x, y) \right) \right\},$$

gdzie $x \in X$, $y \in Y$ a $\mu_R : X \times Y \longrightarrow [0,1]$ jest funkcją przynależności.

Funkcja przynależności przypisuje każdej możliwej parze (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$ jej stopień przynależności $\mu_R(x, y)$, który interpretujemy jako **siłę powiązania między elementami** $x \in X$, $y \in Y$.



Zbiory rozmyte

Relacje rozmyte

Przykład

	x1	x2	x3	x4
y1				
y2				
y3				



Zbiory rozmyte

Relacje rozmyte

Przykład

	x1	x2	x3	x4
y1				
y2				
y3				

Zamiast dotychczasowego:

Liczba x jest blisko 7.

możemy:

Liczba x jest blisko y .



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie

modus ponens: $[(p \implies q) \wedge p] \implies q$



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie

modus ponens: $[(p \implies q) \wedge p] \implies q$

Implikacja: $(p \implies q)$

Przesłanka: p

Wniosek: q



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie



modus ponens: $[(p \implies q) \wedge p] \implies q$

Implikacja: Jeśli dzisiaj **jest czwartek**, to Piotr **pójdzie do pracy**.

Przesłanka: Dzisiaj **jest czwartek**.

Wniosek: Dlatego Piotrek **pójdzie** (dzisiaj) **do pracy**.



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie



Uogólniona rozmyta reguła modus ponens:

Implikacja: jeżeli x jest A to y jest B

Przesłanka: x jest A'

Wniosek: y jest B'

$A, A' \subseteq X, B, B' \subseteq Y$ – zbiory rozmyte,

x, y – tzw. *zmienne lingwistyczne*.



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie



Uogólniona rozmyta reguła modus ponens:

Implikacja: jeżeli x jest A to y jest B

Implikacja:

Przesłanka: x jest A'

Przesłanka:

Wniosek: y jest B'

Wniosek:



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie



Uogólniona rozmyta reguła modus ponens:

Implikacja: jeżeli x jest A to y jest B

Implikacja: jeżeli *prędkość samochodu jest bardzo duża* to *poziom hałas jest wysoki*

Przesłanka: x jest A'

Przesłanka:

Wniosek: y jest B'

Wniosek:



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie



Uogólniona rozmyta reguła modus ponens:

Implikacja: jeżeli x jest A to y jest B

Implikacja: jeżeli *prędkość samochodu jest bardzo duża* to *poziom hałas jest wysoki*

Przesłanka: x jest A'

Przesłanka: *prędkość samochodu jest duża*

Wniosek: y jest B'

Wniosek:



Zbiory rozmyte

Przybliżone wnioskowanie



Uogólniona rozmyta reguła modus ponens:

Implikacja: jeżeli x jest A to y jest B

Implikacja: jeżeli *prędkość samochodu jest bardzo duża* to *poziom hałas jest wysoki*

Przesłanka: x jest A'

Przesłanka: *prędkość samochodu jest duża*

Wniosek: y jest B'

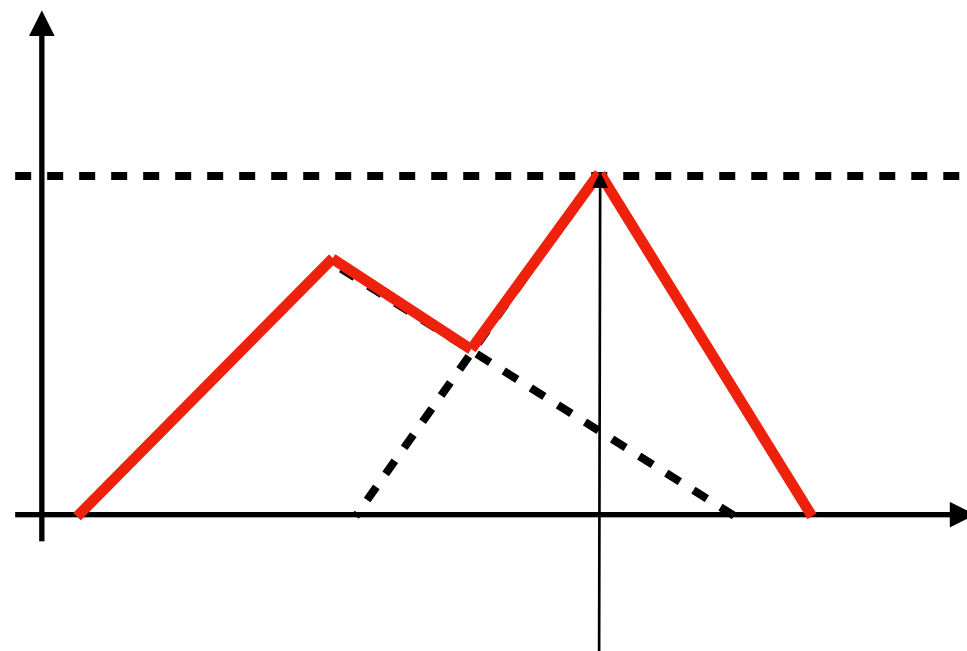
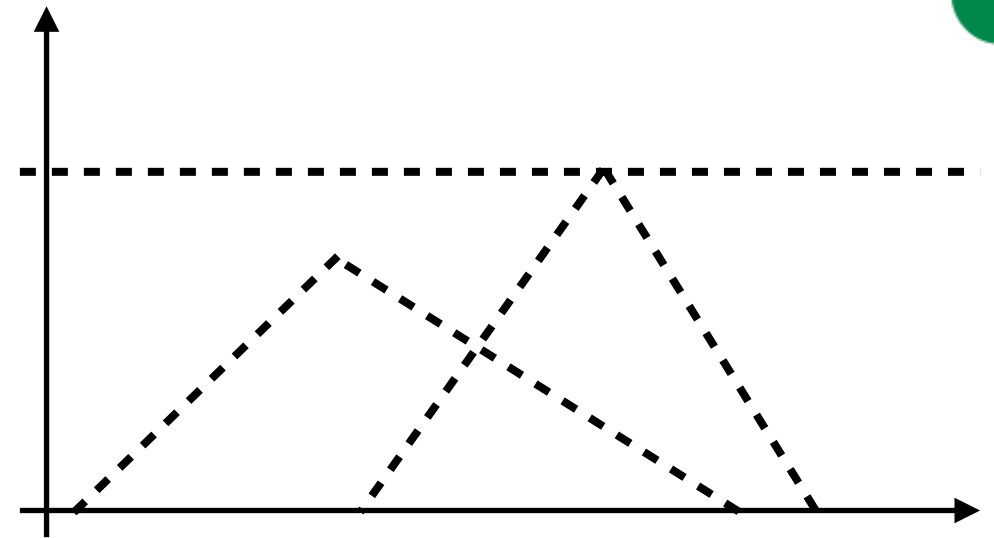
Wniosek: *poziom hałas jest średniowysoki*



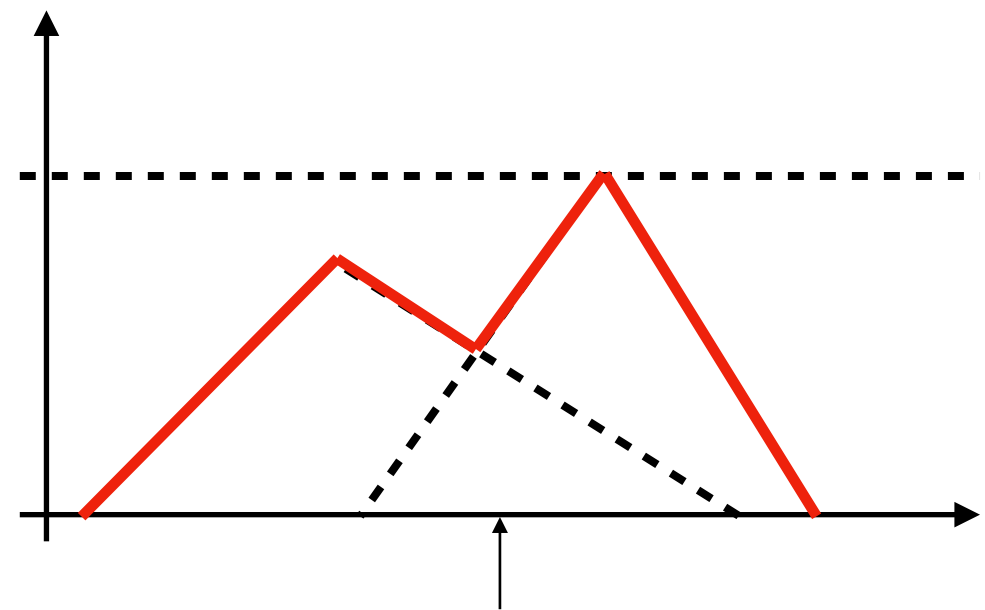
Zbiory rozmyte

Wyostrzanie

... to ustaw temperaturę na wysoką.



maksimum



środek ciężkości



Zbiory rozmyte

Zastosowania



Decyzja (rozmyta) D jest zbiorem rozmytym postaci:

$$D = G \cap C$$

gdzie G i C są zbiorami rozmytymi nazywanymi odpowiednio *celem (rozmytym)* i *ograniczeniem (rozmytym)*.

Powyższe rozumiemy jako: *osiągnąć G i spełnić C .*



Zbiory rozmyte

Zastosowania



Cele:

G_1 – doświadczenie zawodowe

G_2 – znajomość obsługi komputera

G_3 – młody wiek

G_4 – znajomość języka obcego

Ograniczenia:

C – akceptowanie oferowanego wynagrodzenia



Zbiory rozmyte

Zastosowania



Cele:

G_1 – doświadczenie zawodowe

G_2 – znajomość obsługi komputera

G_3 – młody wiek

G_4 – znajomość języka obcego

Ograniczenia:

C – akceptowanie oferowanego wynagrodzenia

Decyzję D wyznaczamy według wzoru:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap C$$



Zbiory rozmyte

Zastosowania



Decyzję D wyznaczamy według wzoru:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap C$$

Teraz D trzeba wyostrzyć aby wskazać jednego konkretnego kandydata.



Materiały źródłowe

Materiały źródłowe

Obrazy



- https://en.wikipedia.org/wiki/File:Original_message.jpg
- <https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Digital.signal.svg>
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Boole_color.jpg
- <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CharlesBabbage.jpg>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Babbages_Analytical_Engine,_1834-1871._\(9660574685\).jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Babbages_Analytical_Engine,_1834-1871._(9660574685).jpg)
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Volta_A.jpg
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/56/Pila_di_Volta.jpg
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Volta_batteries.jpg
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Z3_Deutsches_Museum.JPG
- [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konrad_Zuse_\(1992\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konrad_Zuse_(1992).jpg)
- https://en.wikipedia.org/wiki/File:Glen_Beck_and_Betty_Snyder_program_the_ENIAC_in_building_328_at_the_Ballistic_Research_Laboratory.jpg
- [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dr._J._W._Mauchly_\(cropped\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dr._J._W._Mauchly_(cropped).jpg)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/J._Presper_Eckert#/media/File:ARL_ENIAC_05_\(cropped\)_-_John_Presper_Eckert.png](https://en.wikipedia.org/wiki/J._Presper_Eckert#/media/File:ARL_ENIAC_05_(cropped)_-_John_Presper_Eckert.png)
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:ClaudeShannon_MFO3807.jpg
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Z1_\(computer\)#/media/File:German_Museum_of_Technology,_Berlin_2017_024.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Z1_(computer)#/media/File:German_Museum_of_Technology,_Berlin_2017_024.jpg)
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lotfi_Zadeh_Berkeley_c.jpg

